Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8270372
Centre d'intérêt: 89

Lunkenbein, Dieter, 1937-

Rationalisation d'interventions didactiques : recherches didactiques pour une mathématique à la portée de tous et adaptée à chacun / par D. Lunkenbein, H. Allard, C. Goupille ; [pour la] Section enseignement. -- [Sherbrooke] : Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, 1979.
33 f. : graph. ; 28 cm. -- (Rapport / Université de Sherbrooke, Département de mathématiques ; 28)

En tête du titre: Contribution à la rencontre annuelle de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, Veszprém, Hongrie, 13 au 20 août 1979.
Notes bibliographiques au bas des p.

Cote Dewey: 510.7/L963r Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Didactique *Théorie de l'apprentissage

Identificateur(s) de nom: *Piaget, Jean

Identificateur(s) de sujet: *Groupement (Concept) *Approche piagétienne

Présentation d'un projet de recherche sur le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques. La première partie traite des conceptions théoriques qui sous-tendent le projet: 1. conception globale d'une didactique de la mathématique; 2. recherche en didactique de la mathématique; 3. rôle central de la notion de groupement dans le processus d'apprentissage; 4. organisation de la recherche. La deuxième partie donne des exemples de quelques activités et de leurs résultats: 1. analyse mathématique; 2. recherche en apprentissage; 3. recherche en enseignement.

Les quelques travaux de recherche effectués jusqu'à présent semblent confirmer la pertinence de la notion de groupement: 1. en tant que structure organisatrice de contextes conceptuels; 2. en tant que modèle permettant de décrire l'image mentale formée (ou en formation) par l'apprenant; 3. en tant qu'élément important déterminant la stratégie d'intervention didactique. Cependant, avant de pouvoir affirmer de manière plus spécifique la pertinence de la notion de groupement, il apparaît nécessaire que beaucoup de travaux de précision et de spécification, d'une part, ainsi que de synthétisation et de corrélation, d'autre part, soient réalisés.

Type de document: r
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke
Organisme(s) source(s) - MEQ-DGES
Programme(s) de subvention - FCAC
Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8270372

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Août 1979 Rapport No 28

Rationalisation d'interventions didactiques
Recherches didactiques
pour une mathématique
à la portée de tous et adaptée à chacun

par

D. Lunkenbein
H. Allard, C. Goupille

Faculté des sciences Département de mathématiques

E D U Q 8270372

SECTION ENSEIGNEMENT

Contribution à la rencontre annuelle
de la Commission internationale pour l'étude
et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM),
Veszprém (Hongrie),
13 au 20 août 1979.

Août 1979 Rapport No 28

Rationalisation d'interventions didactiques
Recherches didactiques
pour une mathématique
à la portée de tous et adaptée à chacun

par

D. Lunkenbein
H. Allard, C. Goupille

Projet de recherche subventionné
par le programme F.C.A.C.
du Ministère de l'Education du Québec

1. Conceptions théoriques qui sous-tendent le projet

1.1 Conception globale d'une didactique de la mathématique

La connaissance mathématique n'est ni héréditaire, ni simplement transmissible, elle est principalement une construction de l'individu[1]. Par l'apprentissage de la mathématique, nous désignons alors essentiellement un processus individuel de construction de connaissances mathématiques. En conséquence, l'enseignement de la mathématique a pour rôle de stimuler, de diriger et d'accélérer (dans la mesure du possible) ce processus individuel qu'est l'apprentissage. Dans une telle perspective, la tâche de l'enseignant de la mathématique revêt un caractère subtile, indirect et complexe. En effet, les interventions du maître ne peuvent plus être considérées comme directes et isolées ou comme ayant des effets précis et facilement prévisibles; elles doivent plutôt être conçues comme des actions dont les effets sont essentiellement déterminés par l'individu (sa disponibilité intellectuelle, sa capacité mentale) et par son environnement (conditions favorables ou non, pertinence du sujet, etc.).

Le fait de reconnaître la complexité de la tâche de l'enseignant de la mathématique (et la multitude de travaux de recherche, d'exploration et de réflexions qui l'accompagnent) a donné lieu à la conception d'une nouvelle science, celle de la didactique de la mathématique, conception, d'ailleurs, qui ne s'avère ni uniforme ni toujours cohérente puisqu'elle dépend essentiellement des divers points de vue des concepteurs ainsi que des aspects particuliers qu'ils veulent mettre en évidence. A cet égard, E. Wittmann[2] a formulé une conception de la didactique de la mathématique caractérisée par son

---

1. J.A. EASLEY, Jr., (1978), Mathematical Foundations of Forty Years of Research on Conservation in Geneva, Report No 7, Committee on Culture and Cognition, University of Illinois at Urbana - Champaign.
2. E. WITTMANN, (1978) Grundfragen des Mathematik unterrichts, Vieweg, Bramschweig.

aspect pratique ou d'applicabilité. Cette théorie reconnaît la didactique de la mathématique comme discipline professionnelle de l'enseignant de la mathématique, discipline qui vise essentiellement la clarification et l'amélioration de l'expérience d'apprentissage mathématique chez l'individu; pour cela, elle développe à l'intention de l'enseignant, des structures théoriques ou des bases scientifiques susceptibles de rendre son enseignement plus réfléchi et plus efficace.

De par la nature même des problèmes qu'elle soulève, la didactique de la mathématique est une science qui se place, comme plusieurs autres sciences actuellement en train de naître, aux frontières de certaines disciplines déjà établies, sans négliger pour autant son champ d'application qui est la pratique de l'enseignement. Dans la didactique de la mathématique, on peut distinguer quatre dimensions importantes:

- la dimension mathématique,
- la dimension pédagogique,
- la dimension psychologique et
- la dimension constructive ou pratique.

Les dimensions mathématique, pédagogique et psychologique de la didactique de la mathématique qui la relient à une ou plusieurs sciences ressources se distinguent par leur aspect plutôt neutre ou théorique face à l'enseignement: en effet, ces dimensions partagent avec les sciences ressources un caractère plutôt normatif et descriptif. Par ailleurs, la dimension de la pratique de l'enseignement se distingue à son tour par son caractère plutôt prescriptif et constructif. En effet, les travaux qui s'y rattachent étudient systématiquement la pratique de l'enseignement (de la mathématique) du point de vue de l'enseignant; cela dans l'intention de développer une planification soignée et des moyens didactiques efficaces. Nous appelons cette partie de la didactique <u>le domaine de l'enseignement de la mathématique</u>. Nous lui attachons une

importance particulière parce que les travaux proposés veulent établir un lien entre le théoricien et le praticien et c'est précisément dans ce domaine que les modèles à dimensions plutôt théoriques doivent faire leurs preuves.

Nous avons essayé de résumer cette conception de la didactique de la mathématique dans le schéma suivant:

Schématisation du champ de la didactique de la mathématique

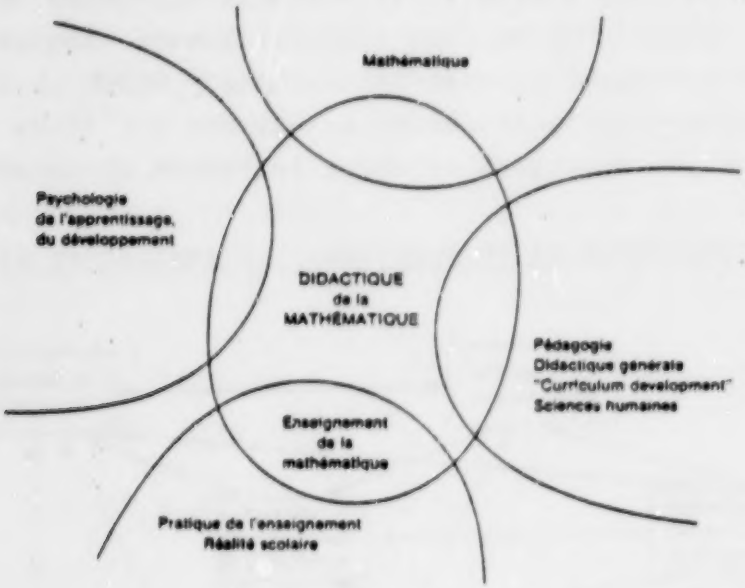


Figure 1

Dans ce champ d'activités scientifiques, nous nous intéressons plus particulièrement au domaine de l'enseignement de la mathématique avec sa problématique centrale qui est celle de la rationalisation des interventions didactiques (dans l'enseignement de la mathématique). Comment en effet, peut-on améliorer les interventions didactiques de l'enseignant afin qu'elles soient de plus en plus fondées et réfléchies et que les résultats qui en découlent soient de mieux en mieux connus et prévisibles?

1.2 Recherche en didactique de la mathématique

Etant donnée cette conception globale de la didactique de la mathématique, nous nous interrogeons sur le caractère essentiel de la recherche dans cette science en devenir. Toute recherche en didactique de la mathématique n'a-t-elle pas principalement comme objectif final l'amélioration de l'expérience d'apprentissage mathématique chez l'individu? Il semble nécessaire d'interrelier et de coordonner plusieurs domaines de recherche afin que la diversité des travaux réalisés convergent essentiellement vers ce but final. Un groupe de travail du CMESG (Canadian Mathematics Education Study Group, Kingston, 1978)[1], a reconnu la nécessité d'intégrer ces domaines dans un réseau de recherche selon le diagramme qui suit:

Réseau de recherches en didactique de la mathématique

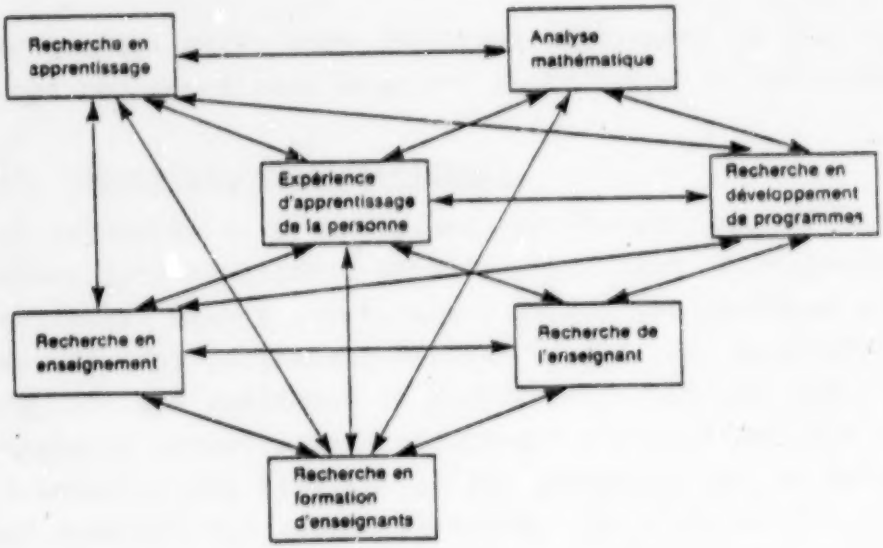


Figure 2

1. T. E. KIEREN, Report of Working Groups "B", Research in Mathematics Education, CMESG, Kingston, 1978.

Dans le diagramme précédent, les relations (symbolisées par les traits) entre les différents domaines signifient non seulement que des germes d'idées de recherche peuvent provenir d'un domaine quelconque mais elles indiquent également la possibilité de chaînes de recherche (par exemple: analyse mathématique de la notion de fraction - étude de l'apprentissage de fractions - construction et expérimentation d'unités d'enseignement sur les fractions suivies de recherches correspondantes en formation d'enseignants et en développement de programmes, etc.). Cependant, de telles chaînes de recherche ne sont pas toujours nécessaires, souvent même, pas toujours réalisables. Enfin, il est important de souligner que les relations mêmes peuvent faire l'objet d'activités de recherche proprement dites (exemple: comment les résultats de recherche sur l'apprentissage des fractions peuvent-ils être appliqués ou utilisés dans la réalité scolaire ou dans les recherches en enseignement?).

Dans ce qui suit, nous décrirons brièvement ce que nous entendons par ces divers domaines ou cellules de recherche:

(i) Recherche de l'enseignant.

Par recherche de l'enseignant, on désigne les efforts quotidiens de l'enseignant dans la planification de son enseignement (aussi bien à court terme que sur des périodes plus longues) et dans la réflexion critique sur ses interventions. Ce terme désigne également la recherche-action que beaucoup d'enseignants consciencieux effectuent au cours de leur travail professionnel. Ces efforts, et les résultats qui en découlent, doivent demeurer une source importante de références pour toute activité de recherche menée en didactique de la mathématique.

(ii) Recherche en formation d'enseignants.

Dans le présent contexte, ce domaine recouvre les recherches qui visent à améliorer la compétence des enseignants de la

mathématique aussi bien au niveau de leurs connaissances théoriques qu'au niveau de leurs habiletés pratiques. Ce domaine inclut, entre autres, les problèmes de l'intégration de la didactique et de la discipline, de la théorie et de la pratique.

(iii) Analyse mathématique.

La recherche dans ce domaine concerne l'étude de sujets ou de processus mathématiques en les explicitant davantage pour des fins didactiques. Les travaux réalisés dans ce domaine de l'analyse mathématique sont peut-être parmi les premiers en didactique de la mathématique: ceux de F. KLEIN, en particulier, sont des exemples par excellence de ce genre de recherche. C'est dans cette même ligne que s'inscrit le travail du groupe de didacticiens et de mathématiciens qui se sont rencontrés à Kingston en juin 1978 pour clarifier le processus de mathématisation[1]. Même si la liste des travaux en analyse mathématique est relativement longue, l'application de tels résultats à des fins didactiques ou à d'autres domaines n'en a pas toujours été faite.

(iv) Recherche en apprentissage.

Dans ce domaine, la recherche est axée sur l'apprenant en train de résoudre un problème ou d'effectuer un exercice en mathématique. La méthodologie-clef consiste alors à élaborer un protocole dynamique et structural[2]; ce travail est descriptif et normatif. La recherche en apprentissage vise la structuration et la catégorisation de comportements mathématiques et de processus de pensée en mathématique; de plus, elle tente d'illustrer des mécanismes qui permettent à l'apprenant d'opérer (compter, classifier, sérier, etc.).

---

1. D. WHEELER, (1978), Report of Working Group "C", Mathematization, CMESG, Kingston
2. J. EASLEY, (1977), Seven Modeling Perspectives on Teaching and Learning-Some Interrelations and Cognitive Effects, Instructional Science 6, (314-367).

(v) Recherche en enseignement.

Ce type de recherche a pour but le développement systématique d'unités d'enseignement, leur expérimentation contrôlée et leur évaluation selon les buts visés.

Même si ce domaine est reconnu comme prioritaire, l'information disponible est très restreinte. L'équipe de recherche en didactique de la mathématique de l'Université de Sherbrooke tente de clarifier et d'élargir ce domaine[1].

(vi) Recherche en développement de programmes.

Ce domaine est vaste dans son application, il n'est pas restreint à la production de manuels scolaires; il recouvre même la conception, l'implantation et l'évaluation de séquences d'unités d'enseignement. Ce type de recherche, d'une part, alimenté par les résultats de tous les autres domaines, à son tour, stimule, d'autre part, ces mêmes domaines. Les problèmes majeurs rencontrés ici sont ceux de l'implantation et de l'évaluation des programmes puisque ces deux composantes nécessitent des recherches à long terme.

1. D. Lunkenbein, (1978), Recherche en enseignement de la mathématique-ébauche d'une approche, Conférence lors d'une journée de recherche en didactique de la mathématique, le 27 janvier 1978, Université de Sherbrooke.

1.3 Rôle central de la notion de groupement dans le processus d'apprentissage.

Dans ses travaux, J. PIAGET cherche "à expliquer le développement et même la formation des connaissances..."[1] "L'idée centrale en est que celles-ci (les connaissances) ne procèdent ni de la seule expérience des objets, ni d'une programmation innée préformée dans le sujet, mais de constructions successives avec élaborations constantes de structures nouvelles. Dans ce cas, les mécanismes à invoquer ne peuvent être que ceux des régulations aboutissant alors, non pas à des formes statiques d'équilibre, mais à des rééquilibrations améliorant les structures antérieures"[2]. Piaget a donc recours "à un processus central d'équilibration" c'est-à-dire à "un processus conduisant de certains états d'équilibre approché à d'autres, qualitativement différents, en passant par de multiples déséquilibres et rééquilibrations"[3].

Le développement de connaissances est donc conçu, essentiellement, en tant que processus individuel de construction. Ce processus est caractérisé par des interactions entre l'individu et son environnement pendant lesquelles l'individu se construit une "image de la réalité". L'individu, en effet, recherche fondamentalement l'équilibre avec son environnement, c'est-à-dire, selon l'image qu'il s'en fait. Ainsi, tente-t-il de développer davantage cette image pour qu'elle corresponde de plus en plus à la réalité. Ce développement de l'image de la réalité peut être conçu comme processus d'apprentissage pour lequel il existe donc une forte motivation cognitive.

---

1. J. Piaget, L'équilibre des structures cognitives, Problème central du développement, Presses Universitaires de France, 1975, p. 9
2. ibid, p. 5
3. ibid, p. 9

Dans ce cadre d'idées, les actions concrètes constituent le moyen fondamental par lequel l'individu entre en interaction avec son environnement (au moins à l'âge scolaire). Ces actions s'intériorisent plus tard dans des opérations (intellectuelles), c'est-à-dire, qu'elles se détachent de plus en plus de la manipulation d'objets concrets pour être effectuées mentalement. De plus, les opérations s'organisent en systèmes (flexibles) d'ensemble (groupements) qui permettent à l'individu de réaliser une adaptation intelligente et cohérente.

Nous concevons ces groupements comme des éléments constituants de l'image de la réalité de l'individu et nous les interprétons intuitivement comme des structures d'ensemble composées d'états et d'opérations (relations, schèmes opératoires) à l'intérieur desquelles on peut se placer dans un état quelconque relativement à d'autres états et à l'intérieur desquelles on peut se déplacer vers d'autres états de la même structure par des opérations dont les effets sont contrôlables.[1] Ces groupements peuvent être considérés en tant qu'expressions d'états d'équilibre dynamique et leur constitution se place au coeur même du processus individuel d'apprentissage.

En admettant les cadres théoriques de l'épistémologie génétique de Jean Piaget, nous attribuons donc en même temps à la notion de groupement une position centrale en tant que structure d'opérations mentales engendrant la connaissance. Du point de vue psychologique-didactique, deux questions surgissent:

(i) Peut-on donner des exemples de groupements concrets qui, dans des contextes conceptuels donnés (de l'enseignement de la mathématique), sont générateurs de connaissances précises?

---

1. Concernant la définition précise du concept de groupement voir: E. WITTMANN, Natural Numbers and Groupings, Educational Studies in Mathematics, 6, (1975), 53-75 ou
L. THERIEN, Le concept de groupement dans l'élaboration de situations d'apprentissage en math. à l'élémentaire, Rapport No 22, Université de Sherbrooke, 1979.

(ii) Comment l'enfant développe-t-il spontanément des groupements, c'est-à-dire, peut-on dépister des étapes observables de formation de groupements chez l'apprenant?

C'est à ces questions que notre projet de recherche tente de répondre tout en s'insérant dans une conception pratique de la didactique de la mathématique.

1.4 Organisation de la recherche.

La conception globale de la didactique de la mathématique, dont il a été question au paragraphe 1.1 (voir aussi figure 1), la perception d'un réseau de recherches en didactique de la mathématique que nous avons esquissé au paragraphe 1.2 (voir aussi figure 2) finalement, le fait de reconnaître le rôle central de la notion de groupement dans le processus individuel d'apprentissage (voir paragraphe 1.3) nous ont conduits à étudier plus systématiquement la pertinence de la notion de groupement dans le cadre de la rationalisation des interventions didactiques. Pour des fins de systématisation, cette étude a donné lieu à trois types de recherche:

(i) Recherche en enseignement.

Selon notre conception de la didactique, ce type de recherche constitue le coeur même du projet. Pour cela, nous tentons de développer des unités d'enseignement visant la création, par l'enfant, d'objets mentaux (nombres, formes géométriques, combinaisons, concepts, etc.) et la structuration de ceux-ci en groupements par des opérations dérivées d'actions concrètes (nombres naturels reliés par la relation $\leq$ ou par la relation de divisibilité, formes géométriques reliées par des particularisations, etc.).

Quelles seraient les interventions didactiques adéquates qui pourraient engager l'enfant dans un processus de création et de structuration d'objets mentaux? Voilà la question qui traduit la problématique centrale de nos travaux en recherche en enseignement. Dans ce domaine, il nous importe avant tout que les interventions didactiques soient réalistes c'est-à-dire applicables dans la réalité scolaire quotidienne; et cela, afin que, tel qu'escompté, ces travaux contribuent à réduire l'écart entre le théoricien et le praticien.

La méthodologie employée pour la réalisation de ces travaux est celle du processus de la rationalisation des interventions didactiques[1] formulée en tant que modèle de travail d'une démarche dynamique dont nous esquissons ci-après le schéma global.

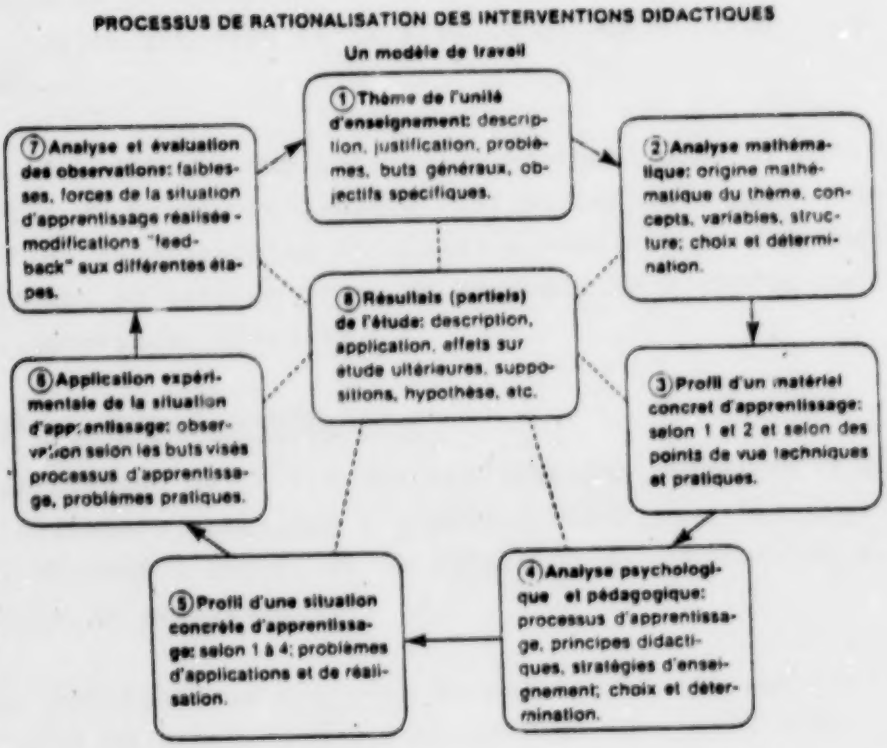


Figure 3

(ii) Recherche en apprentissage.

Pour que les interventions didactiques à développer en (i) puissent tenir compte des capacités et du développement de l'enfant, nous avons besoin d'informations en ce qui a trait à la création naturelle d'objets mentaux et à l'établissement spontané de relations entre ceux-ci dans des situations précises.

---

1. Voir aussi: D. LUNKENBEIN, Rationalising Teaching Interventions - A Working Model of a Process of Research in Mathematics Teaching, Educational Studies in Mathematics, 8 (1977), 271-293.

Dans ce domaine, nous entreprenons donc des recherches relatives à la formation spontanée et au développement naturel de groupements chez les enfants auxquels s'adressent nos unités d'enseignement.

La problématique centrale de ces travaux est de connaître des types de groupements ainsi que les stades de développement de ceux-ci en fonction de la situation donnée et de l'âge de l'enfant.

La méthodologie employée principalement dans ce domaine est celle du protocole dynamique et structural, impliquant la collection de protocoles détaillés d'observation des comportements des enfants en train de résoudre un problème dans des circonstances précises.

(iii) Analyse mathématique

Les travaux de ce domaine étudient des thèmes mathématiques (habituellement enseignés à l'élémentaire) pour des fins didactiques et sous l'aspect de la formation de concepts et de la formation de groupements.

La problématique centrale de ces travaux est de déceler, dans un thème donné, les objets mentaux impliqués ainsi que leur nature et leur degré d'observation. Les organisations possibles du thème selon divers groupements ou séries de groupements font également partie du contexte des problèmes inhérents à ces travaux.

La méthodologie de ce domaine est essentiellement celle qui, traditionnellement, a été appelée l'analyse du contenu (STOFFANALYSE) et qui consiste à scruter un contenu donné selon une hiérarchie mathématique des concepts et à l'organiser selon l'agencement des structures mathématiques impliquées.

Résumé de l'organisation de la recherche:

Types de recherches

	Recherche en enseignement	Recherche en apprentissage	Analyse en mathématique
Objectifs (généraux)	Développer des unités d'enseignement (réalistes et applicables) engageant l'enfant dans un processus de création et de structuration d'objets mentaux - processus-clé de l'apprentissage de la mathématique - Créer un modèle opératoire du processus de la rationalisation des interventions didactiques	Rendre les unités d'enseignement plus adaptées aux capacités et au développement des enfants - Contribuer au développement d'une théorie didactique de la formation de concepts par des processus de structuration et de formation de groupement.	Clarifier les structures mathématiques de thèmes et de processus de l'enseignement de la mathématique (à l'élémentaire) concernant les possibilités de formation de concepts et de groupements. - Contribuer au développement d'une théorie didactique du concept de groupement.
Problématiques	Quelles sont les interventions didactiques adéquates et réalistes pour stimuler les enfants à s'engager dans un tel processus et quelles sont les organisations possibles de ces interventions pour assurer une continuité du processus?	Quelles sont les opérations mentales employées spontanément et quels sont les groupements formés naturellement par les enfants en fonction de l'âge des enfants et de la situation précise donnée?	Quels sont les groupements concrets de certains contenus d'enseignement qui sont particulièrement pertinents pour la création et le développement des connaissances mathématiques?
Méthodologies	Modèle de travail du processus de la rationalisation des interventions didactiques.	Protocole dynamique et structural: protocoles détaillés d'observation des comportements des enfants en train de résoudre un problème dans des circonstances précises.	Analyse (mathématique) de contenus d'enseignement selon une hiérarchie (mathématique) de concepts et l'organisation de ceux-ci selon l'agencement des structures (mathématiques) impliquées.

TABLEAU 1

Il y a lieu de répéter que ces trois domaines de recherche ont été distingués pour des fins de systématisation car, axés sur la recherche en enseignement (perspective centrale), ces domaines sont étroitement reliés les uns aux autres. En effet les travaux de recherche en apprentissage sont, dans la plupart des cas, stimulés par les problèmes d'enseignement; ils ont comme but principal de rendre les unités d'enseignement plus réalistes et plus adaptées aux capacités et au développement des enfants. Pour sa part, l'analyse mathématique vise principalement à éclairer les thèmes mathématiques à enseigner et à en déterminer les possibilités de formation de groupements. Recherche en apprentissage et analyse mathématique se stimulent mutuellement par les aspects théoriques et effectifs de formation de groupements. Nous résumons ces interrelations dans le graphique suivant:

Schématisation des interrelations des domaines de recherche

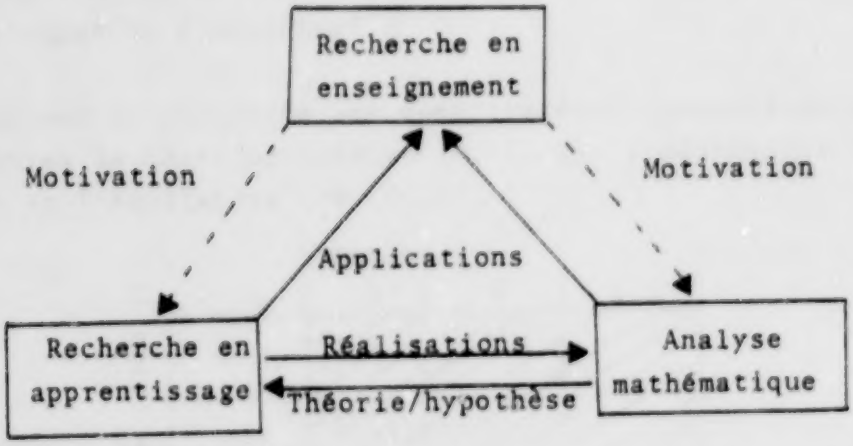


Figure 4

2. Exemples de quelques activités et de leurs résultats.

Pour expliciter ce qui précède, nous décrivons ci-après quelques activités de recherche effectuées dans les trois différents domaines. Nous commençons par un exemple du domaine de l'analyse mathématique afin d'illustrer davantage la notion de groupement ainsi que de mettre en évidence sa pertinence dans le processus d'acquisition et de développement de connaissances.

2.1 Analyse mathématique

En travaillant en formation continue avec les enseignants en exercice, on constate souvent qu'ils conçoivent un carré comme étant un non-rectangle ou un rectangle comme étant un non-parallélogramme etc. Souvent, il est très difficile de leur faire admettre qu'un carré peut être conçu comme étant un rectangle particulier et un rectangle comme étant un parallélogramme spécial. Quelle image mentale retiennent-ils des différents types de quadrilatères? Quelle image mentale leur est-il suggérée d'accepter?

Souvent on classifie les quadrilatères (grossièrement) selon les paires de côtés parallèles (0, 1, 2), l'équiangularité (0, 1) et l'équilatéralité (0, 1).

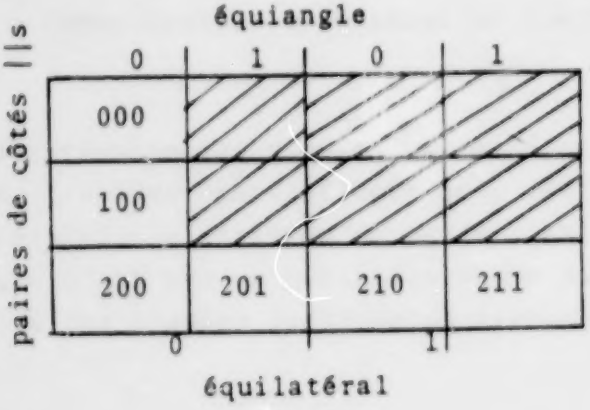


Figure 5: Classification de quadrilatères

De cette façon nous obtenons 6 classes que l'on pourra symboliser par un triplet de nombres comme suit

000, 100, 200, 201, 210, 211

Si l'on ordonne ensuite ces classes selon le nombre de propriétés qu'elles possèdent (degré de perfection), on obtient alors l'image suivante:

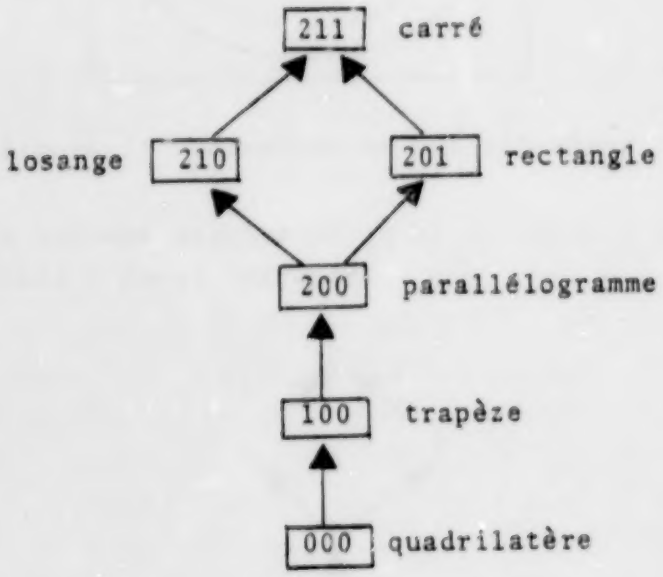


Figure 6: Structuration de classes de quadrilatères

Si l'on appelle ensuite ces classes, comme d'habitude quadrilatères, trapèzes, parallélogrammes, rectangles, losanges et carrés, alors il est clair qu'un carré n'est pas un rectangle et un rectangle n'est pas un parallélogramme parce qu'ils appartiennent à des classes différentes respectivement.

Si, par contre, on forme dans l'ensemble Q des quadrilatères les sous-ensembles T(trapèze), P(parallélogramme), R(rectangle), L(losange) et C(carré)

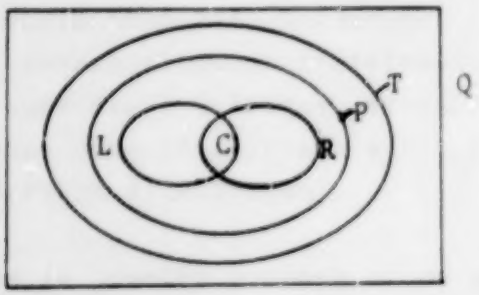


Figure 7: Ensembles de quadrilatères

et si on les ordonne ensuite selon la relation d'inclusion, alors on reçoit l'image suivante:

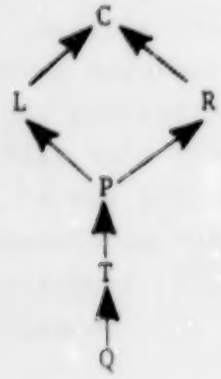


Figure 8: Structuration d'ensembles de quadrilatères (par la relation d'inclusion)

Maintenant il est évident qu'un carré est un rectangle particulier parce qu'il est inclus dans l'ensemble des rectangles.

Les deux images (figures 6 et 8) représentent des groupements que l'on pourra même dire isomorphes. Mais les deux groupements sont essentiellement différents. D'une part, ils diffèrent dans leurs états (classes, ensembles) et, d'autre part, ils diffèrent dans la relation entre états (relation de "perfection", relation d'inclusion).

Nous appelons le premier groupement un groupement des classes d'une partition et le deuxième (selon WITTMANN)[1] un groupement booléen.

Alors si nous demandons à l'enseignant qui conçoit le carré comme étant bien distinct d'un rectangle de le concevoir en tant que rectangle particulier, alors nous lui demandons de changer sa conception de quadrilatères en tant qu'entités (classes) bien distinctes et vaguement reliées par une relation de perfectionnement, en une conception où les divers types (ensembles) de quadrilatères sont structurés par la relation d'inclusion ce qui signifie une structuration logique de leurs propriétés. Un tel changement de conception, surtout à l'âge adulte, n'est pas nécessairement chose facile et ne se produira probablement pas instantanément.

L'analyse de contextes conceptuels (quadrilatères) en termes de groupements nous permet alors de mieux comprendre certaines difficultés d'apprentissage et d'enseignement et de prévoir, éventuellement, des mesures adéquates pour pallier à ces obstacles.

---

1. E. WITTMANN, The Concept of Grouping in Jean Piaget's Psychology - Formalization and Applications, Educational Studies in Mathematics, 5, 1973, 125-146.

En général, les travaux de recherche dans le domaine de l'analyse mathématique ont révélé, jusqu'à présent, une pertinence potentielle considérable de la notion de groupement en tant que structure organisatrice de contextes conceptuels et en tant qu'instrument didactique de la planification de l'enseignement et de la rétrospection sur l'enseignement. Cette pertinence potentielle se manifeste:

- par la présence plus ou moins explicite d'exemples de groupements (schémas, structuration de contenus, etc.) dans des instruments d'enseignement de la mathématique à tous les niveaux; ce fait semble indiquer que la notion de groupement est déjà appliquée inconsciemment pour des fins d'enseignement (voir les exemples donnés des figures 9 et 10);
- par une variété assez grande de publications où la notion de groupement est explicitement appliquée dans la construction et l'analyse de situations d'apprentissage[1].

Des travaux d'analyses mathématiques en termes de groupement ne se font actuellement que très sporadiquement et se présentent, dans la plupart des cas, comme des exemples isolés. L'analyse systématique de contenus conceptuels de l'enseignement de la mathématique serait souhaitable afin de pouvoir déterminer la pertinence de cette notion relativement à des contenus précis.

---

1. Voir entre autres:

E. WITTMANN, Natural Numbers and Groupings, Ed. Stud, in mathematics, 6, 1975, 53-75.

H.-G. STEINER, Der Minicomputer von Papy als Piagetsche Gruppierung, Didaktik der Mathematik, 3, 1973, 226-232.

G. WALTHER, Beispiele fuer Gruppierungen, und das erweiterte operative Prinzip, Didaktik der Mathematik, 4, 1977, 307-312.

D. LUNKENBEIN, Groupements de treillis, Rapport No 19, 1977 Université de Sherbrooke, Département de mathématiques.

Nous avons débuté un tel travail pour l'enseignement de la géométrie à l'élémentaire et les résultats partiels qui en émanent sont appliqués dans un cours approprié destiné aux futurs enseignants[2].

2. D. LUNKENBEIN, Géométrie (dans l'enseignement à l'élémentaire), Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences, Département de mathématiques, 1979.

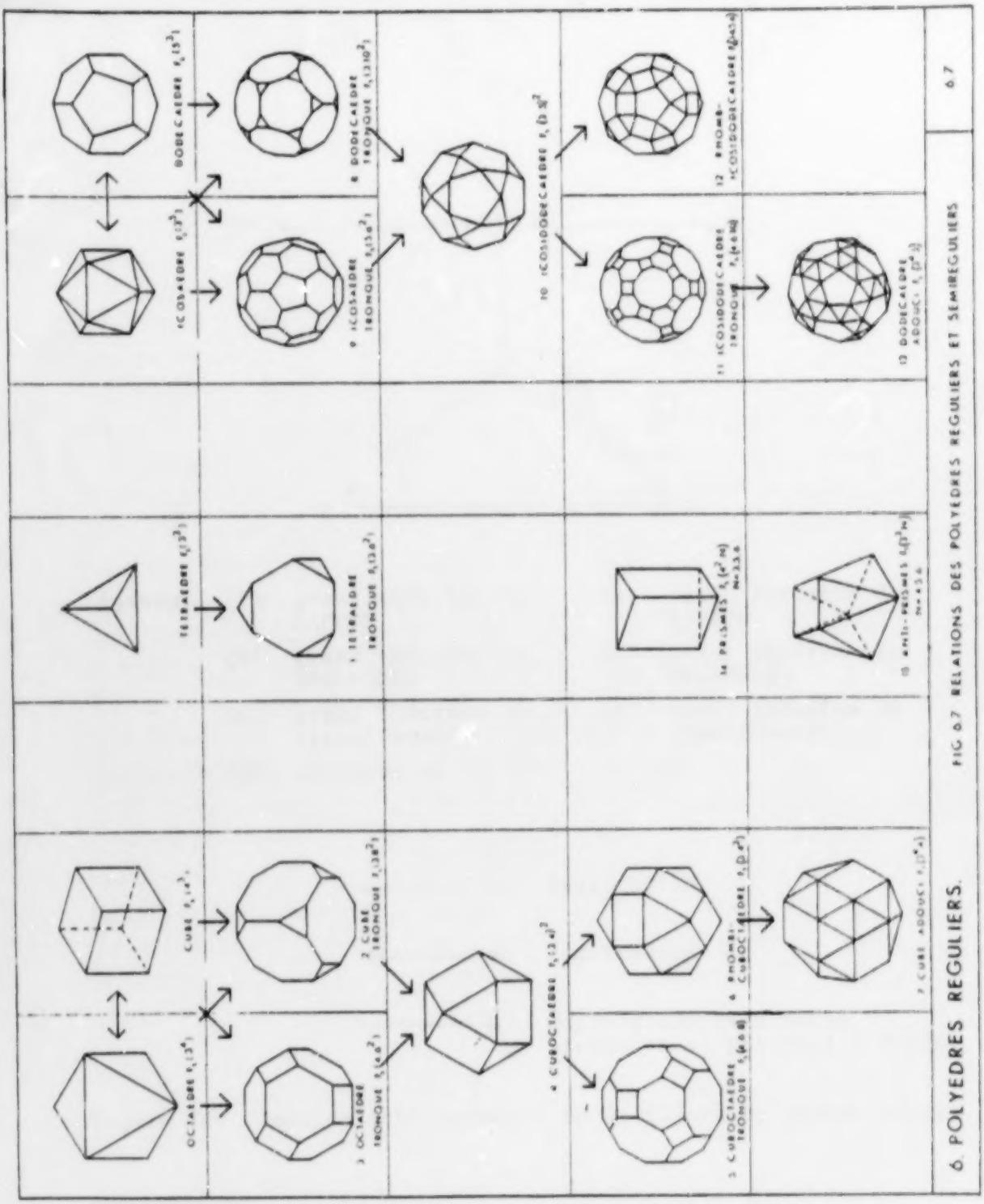
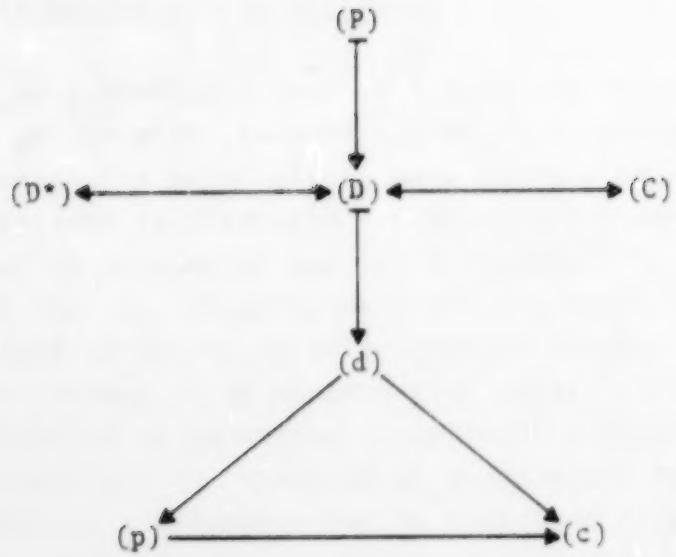


Figure 9: Relations des polyèdres réguliers et semi-réguliers (tiré de J.J. Baracs, Topologie structurale, Université de Montréal, Faculté d'aménagement)



Légende:

(P)	grand théorème de PAPPUS	(p)	petit théorème de PAPPUS
(D)	grand théorème de DESARGUES	(d)	petit théorème de DESARGUES
(C)	grand théorème de cisaillement	(c)	petit théorème de cisaillement
(D*)	variante de (D)		

⟶ : Implication

⟷ : Equivalence

⊢⟶ : Implication dans cette direction et pas dans l'autre

Figure 10: Implications respectives de théorèmes géométriques[1].

1. ROLF LINGENBERG, Grundlagen der Geometrie 1, B 1 Hochschultaschenbücher, 158/158a, Bibliographisches Institut, Mannhein, Wien, Zurich, 1969.

2.2 Recherche en apprentissage

Comme nous étudions, dans ce domaine de recherche, la formation de groupements, en général, et la formation de types de groupements, en particulier, nous pouvons nous demander, dans le contexte de l'exemple précédent des quadrilatères, s'il est naturel ou accidentel que les enseignants se forment, dans la plupart des cas, un groupement des classes d'une partition de quadrilatères plutôt qu'un groupement booléen correspondant. En d'autres termes et de manière plus large, est-ce que, dans la structuration de contextes conceptuels semblables à celui des quadrilatères, la formation de groupements des classes d'une partition a préséance sur la formation de groupements booléens correspondants: voilà un exemple d'un problème qui relève spécifiquement de ce domaine de recherche.

Dans ses travaux, Piaget ne peut pas répondre à une telle question car il ne distingue pas ces deux types de groupements. Il ne mentionne que le groupement de "l'emboîtement hiérarchique des classes"[1] qui se révèle, après analyse, plutôt en tant que groupement booléen qu'en tant que groupement des classes d'une partition. Cependant, Piaget qualifie ce groupement de l'emboîtement hiérarchique des classes comme "le plus simple" des groupements logiques. VAN HIELE[2], par contre, mentionne, en tant qu'exemples, des conceptions de quadrilatères en termes de groupements des classes d'une partition sur des niveaux précédents le niveau caractérisé par une conception de quadrilatères en termes de groupements booléens.

---

1. J. PIAGET, La psychologie de l'intelligence, Armand Colin, Paris, 1967, page 50.

2. I. WIRZUP, Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry, in J.L. MARTIN(editor), Space and Geometry Papers from a Research Workshap, ERIT/SMEAC Center for Science, Mathematics and Environmental Education, Ohio State University, Columbias, Ohio, 1976.

Nous avons abordé cette question indirectement lors de l'élaboration et de l'expérimentation de deux unités d'enseignement en géométrie pour des enfants du niveau primaire. Dans la première unité[1], qui visait explicitement la structuration de quadrilatères en termes de groupements booléens, nous avons rencontré des difficultés considérables pour stimuler les enfants à penser en termes d'ensembles et de relations d'inclusion plutôt qu'en termes de classes. Ce n'est que par des interventions didactiques particulières et par un matériel semi-concret correspondant que nous avons pu résoudre ce problème. Une deuxième unité[2] avait pour but d'explorer des possibilités d'engager des enfants du niveau primaire dans un processus de formation de groupements dans un contexte semblable à celui des quadrilatères (hexagones) tout en laissant les enfants libres de penser en termes de classes ou en termes d'ensembles et d'inclusions. Ce travail a, entre autres choses, mis en évidence que les enfants de 10 à 11 ans que nous avons observées forment naturellement des classes d'hexagones et pensent spontanément en termes de groupements des classes d'une partition. Les états (ensembles) du groupement booléen correspondant n'ont été élaborés qu'ultérieurement en tant que réunion de classes disjointes. Du point de vue logique, les classes sont caractérisées (par exemple) comme étant les collections d'objets (formes hexagonales) admettant précisément n rotations (n symétries) tandis que les ensembles correspondants se présentent, dans le cadre de cette expérience, comme étant des collections d'objets admettant au moins n rotations (n symétries). La conception des états "au moins n rotations"

---

1. J. M. HAMEL, Schématisation de groupements logiques d'inclusion dans l'étude des quadrilatères, Mémoire de maîtrise, Direction générale de la Formation des Maîtres, Université de Sherbrooke, 1979

2. L. AUBIN, J. JUTRAS, Elaboration de groupements logiques d'inclusion et de groupements logiques des classes d'une partition dans un ensemble d'hexagones, Mémoire de maîtrise, Direction générale de la Formation des Maîtres, Université de Sherbrooke, 1979.

s'est élaborée naturellement à partir des états "exactement n rotations" en y ajoutant graduellement tous les états de "plus que n rotations".

De tels travaux touchant au domaine de la recherche en apprentissage et qui, dans l'exemple cité, semblent indiquer que la formation de groupements logiques est précédée par l'élaboration de groupements de classes d'une partition, peuvent avoir des conséquences importantes pour la construction et l'analyse de séquences d'apprentissage.

2.3 Recherche en enseignement

Les travaux réalisés en recherche en enseignement tentent d'une part, de vérifier l'applicabilité des résultats obtenus dans les deux autres domaines pré-cités et, d'autre part, d'ouvrir de nouvelles pistes de recherche ou de préciser des sujets d'intérêt pour ces mêmes domaines (voir figure 4 p. 15 du présent document). De plus, ces travaux prétendent apporter une contribution significative à la cause de l'enseignement de la mathématique dans les classes.

C'est ainsi que, dans l'intention de venir en aide aux maîtres du primaire dépourvus, tant de connaissances géométriques suffisantes que de matériels didactiques adéquats pour favoriser l'apprentissage, par l'enfant, du monde des formes tri-dimensionnelles, nous avons créé une unité d'enseignement sur le thème "POLYEDRES" par le moyen d'un diaporama accompagné d'un matériel concret d'apprentissage (blocs polyèdres, matériel de construction, fiches de travail, guide du maître)[1].

---

1. D. LUNKENBEIN, H. ALLARD, C. GOUPILLE, P. ALLARD, Polyèdres: unité d'enseignement, Rapport No 25, Université de Sherbrooke, 1979. (Ce rapport fournit une description intégrale de l'unité).

Dans le développement de telles unités d'enseignement, comme nous l'avons dit plus haut, nous visons la création, par l'enfant, d'objets mentaux (ou concepts) ainsi que la structuration de ceux-ci en groupements par le moyen d'opérations dérivées d'actions concrètes. Dans cette optique, l'unité POLYEDRES poursuit comme objectif d'initier l'enfant du 2e cycle du primaire à la géométrie de l'espace en le mettant en situation d'entrer en interaction avec un environnement géométrique tri-dimensionnel, de concevoir progressivement les propriétés des objets qui lui sont soumis, d'établir des liens entre ces diverses propriétés des objets pour finalement structurer cet environnement qu'est celui des polyèdres.

Dans la conception, l'élaboration, l'expérimentation et l'évaluation de cette unité d'enseignement, nous nous sommes inspirés du modèle du processus de la rationalisation des interventions didactiques (voir figure 3 p. 12 du présent document) tant pour sa méthodologie que pour son esprit de création progressive.

En ce qui a trait au rationnel théorique, c'est-à-dire au contenu mathématique de l'unité, notre stratégie d'enseignement a été élaborée à partir d'une analyse du contexte conceptuel de la notion de polyèdre et cela, en termes de groupements.[1]

---

1. D. LUNKENBEIN, H. ALLARD, C. GOUPILLE, Polyèdres: Rapport de recherche No 26, Université de Sherbrooke, 1979, pp. 3 à 22.

La figure qui suit nous présente une schématisation globale de l'étude des polyèdres. Les cases hachurées de ce schéma représentent les concepts abordés dans la dite unité d'enseignement.

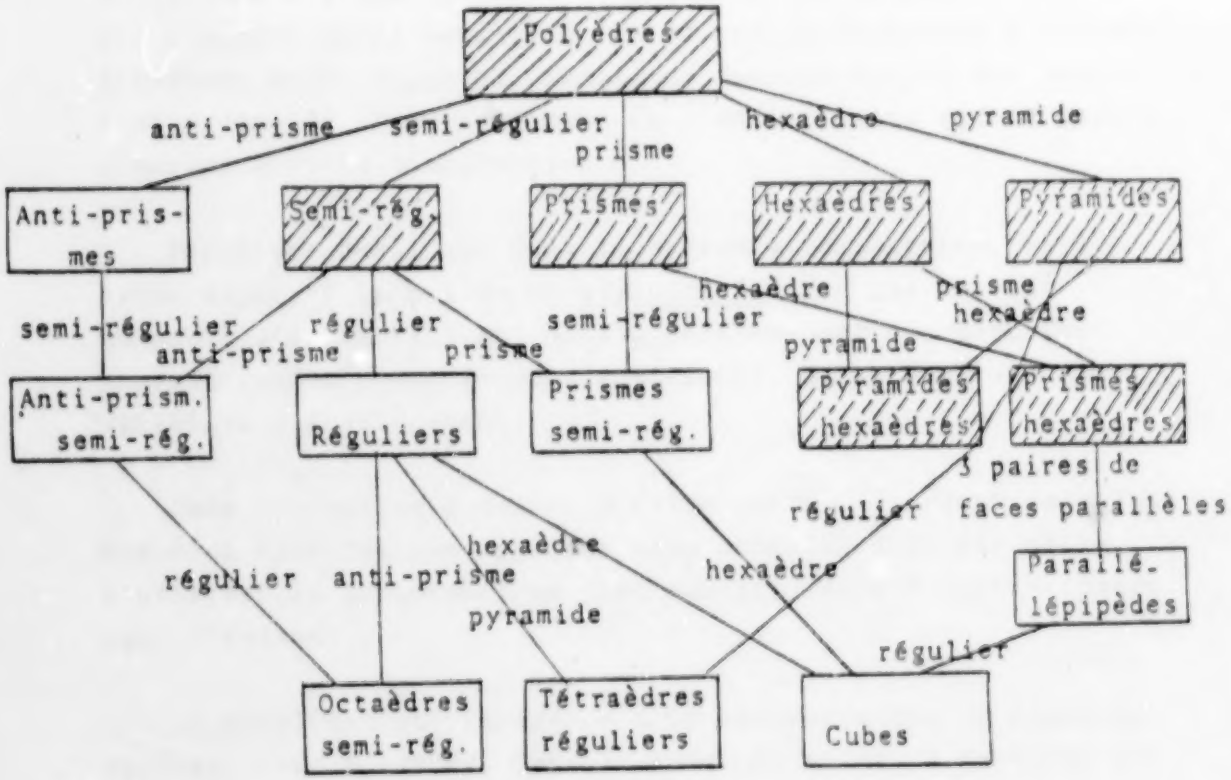


Figure 11[1]

1. D. LUNKENBEIN, H. ALLARD, C. GOUPILLE, Polyèdres: Rapport de recherche No 26, Université de Sherbrooke, 1979, p. 25.

L'analyse et l'évaluation de cette unité d'enseignement ont été faites en détails dans le rapport no. 26 cité en page 27. Dans ce qui suit, nous nous limiterons à mentionner quelques pistes de prolongement et d'approfondissement de cette activité particulière de recherche.

Signalons d'abord que le domaine conceptuel comme tel se prête bien à l'enseignement au primaire, et de par la variété des concepts qu'il sous-tend, et de par la variation d'approfondissement qu'il suggère. Ainsi, ce domaine est-il non seulement proche de l'environnement de l'enfant, mais encore peut-il l'enricher et le complémenter.

Rappelons aussi que dans la présente réalisation, nous avons exploité la notion de groupements, non pas en tant qu'outil d'apprentissage, mais plutôt en tant que structure pouvant guider notre façon d'intervenir, c'est-à-dire, notre stratégie d'enseignement.

Dans les suites à donner à cette unité, il serait cependant bon d'en élaborer une approche plus subtile, à savoir celle d'utiliser le groupement en tant que stratégie d'apprentissage pour l'enfant.

La problématique inhérente à la communication de concepts spatiaux nous a amenés, dans la présente unité, à explorer les possibilités de réalisation d'un matériel concret (blocs) ainsi que sa représentation sur diapositives. Ces concrétisations semblent répondre aussi bien aux besoins des enfants (manipulation-visualisation) qu'aux besoins des enseignants (praticabilité-accessibilité).

Les contraintes de la réalité scolaire, dont les principales composantes sont les enfants, les enseignants et les programmes, nous ont forcés à faire un compromis entre une incursion libre

dans le domaine conceptuel respectant en cela les capacités et le rythme des enfants et, une présentation doublée d'un contenu bien circonscrit mettant plutôt l'apprenant en situation de "récepteur". Ce compromis, quoiqu'il nous rende passablement mal à l'aise à l'égard de certains principes didactiques que nous préconisons, semble bien approprié surtout en ce qui concerne les attentes des praticiens de l'enseignement.

L'unité d'enseignement ainsi réalisée ne constitue qu'une toute première approche à plusieurs aspects auxquels il faudrait éventuellement faire face dans le domaine de la recherche en enseignement. Quant au "contenu enseigné", l'unité ne présente qu'une introduction globale au contexte conceptuel. A cause des contraintes imposées par la praticabilité et, il faut l'avouer, à cause de notre peu d'expérience dans le contexte des problèmes impliqués, cette unité n'introduit aux concepts que par une voie empirique de discrimination, négligeant presque totalement les aspects des processus dynamiques du développement de la représentation spatiale et de la formation de concepts dans lesquels, nous semble-t-il, la notion de groupement, jouerait un rôle encore plus important que cela n'a été mis en évidence jusqu'à présent.

Ainsi, la présente unité d'enseignement ouvre-t-elle sur de nombreuses possibilités visant à compléter et à poursuivre naturellement un processus d'apprentissage amorcé et stimulé par la dite unité. Cette multitude de pistes - l'énumération qui en est faite ici n'est pas complète - illustre bien la complexité du domaine de la recherche en enseignement et justifie, à notre avis, une méthodologie à caractère de développement tel qu'indiqué dans le processus de la rationalisation des interventions didactiques. De plus, cette variété de débouchés marque clairement les interrelations entre les divers domaines de recherche en didactique de la mathématique tel qu'illustré dans le réseau de recherche présenté en figure 2.

L'articulation, par des exemples, de ce réseau de relations, l'indication et la précision de pistes de recherche aussi bien en enseignement qu'en apprentissage et, par conséquent, le développement progressif de la conception de la didactique de la mathématique, voilà qui constitue, à part la réalisation concrète de l'unité d'enseignement POLYEDRES, le résultat majeur de cette recherche en enseignement.

Remarque:

Pour des fins d'exemplification des trois domaines de recherche touchés par notre projet, nous n'avons mentionné ici que trois exemples tirés de la même discipline mathématique, à savoir, la géométrie. Il va sans dire que nos travaux ne se limitent pas à ce secteur ni à ces exemples, mais qu'ils s'étendent tout aussi bien à l'arithmétique et à la combinatoire et cela, relativement aux trois axes de projet.

3. Résumé et prospectives

Les quelques travaux de recherche effectués jusqu'à présent semblent confirmer la pertinence de la notion de groupement:

a.- en tant que structure organisatrice de contextes conceptuels:
la formation (inconsciente) de groupements dans des domaines très variés, aussi bien par l'adulte que par l'enfant, témoigne de l'utilité de cette structure mentale comme moyen de maîtriser des situations selon les besoins de l'individu.

b.- en tant que modèle permettant de décrire (au moins fragmentairement) l'image mentale formée (ou en formation) par l'apprenant:
le modèle de groupement nous permet de considérer les actions (concrètes ou mentales) de l'individu dans le cadre d'une structure théorique dont les particularités peuvent être considérées comme reflet (partiel) de l'image mentale que s'est construit l'individu à partir d'une situation donnée.

c.- en tant qu'élément important déterminant la stratégie d'intervention didactique:
l'image mentale qu'a l'enseignant du contenu à enseigner - ou celle que l'enfant est susceptible d'acquérir - déterminent essentiellement sa façon d'intervenir auprès de ses élèves.

Cependant, avant de pouvoir affirmer de manière plus spécifique la pertinence de la notion de groupement, il nous apparaît nécessaire que beaucoup de travaux de précision et de spécification, d'une part, ainsi que de synthétisation et de corrélation d'autre part, soient réalisés. Ces travaux auraient comme effet d'éclairer davantage les types, les niveaux et les domaines de groupements, la formation de groupements en fonction de situations diverses et de l'âge de l'apprenant de même que les effets, sur cette formation, de diverses stratégies d'interventions didactiques.

Puisque la formation de groupements est essentiellement un processus individuel que l'on ne peut diriger que de manière indirecte et très partielle, il s'avère fort probable que les groupements formés par les apprenants diffèrent du groupement préconisé par l'enseignement. Il devient donc essentiel, pour l'amélioration de l'enseignement, que l'on connaisse davantage les types de groupements pouvant être formés, que l'on puisse déterminer plus précisément le groupement formé ou en voie de

formation chez un individu et que l'on puisse influencer de manière plus directionnelle cette formation.

L'enseignement de la mathématique est un lieu privilégié et exceptionnel de formation et de développement de structures cognitives de plus en plus sophistiquées et puissantes - processus non limité à la mathématique mais transférable à d'autres domaines d'activités intellectuelles souvent plus complexes et moins faciles à maîtriser. Ainsi, l'éducation mathématique peut-elle servir d'exemples pour le développement de structures mentales et pouvons-nous parler d'une éducation par la mathématique, sans pour autant perdre de vue qu'une telle éducation n'est possible que si elle est accompagnée de la formation d'un bagage suffisamment élaboré de connaissances mathématiques.

Si, finalement, on était en mesure de préciser le développement de la structure mentale d'un individu, son état à un moment donné ainsi que ses capacités d'élargissement, et si l'on connaissait davantage de moyens de faciliter ce développement dans une direction donnée, alors on serait plus en mesure d'offrir un enseignement de la mathématique à la portée de tous et adapté à chacun.